Oyun teorisi: Ders 15 Transkript

29 Ekim 2007

Profesör Ben Polak: Geçen sefer NIM oyununu oynamayı bitirmiştik ve umuyorum ki hatırlıyorsunuzdur, NIM oyunu içinde iki öbek taş vardı – bunlar yerine biz tahtada çizgiler kullandık – ve kazanan da en son taşı alan oluyordu. Hatırlarsanız öbek seçmek zorundaydınız. Burada bir geçiş yapmak için NIM oyununu kullanmak istiyorum. NIM oyunu hakkında ortaya çıkardığımız şey şuydu bizim için çok güzel bir şekilde oyunlarda ilk hamle avantajı olabileceğini veya ikinci hamle avantajı olabileceğini göstermektedir. Oyundaki küçük bir değişiklik, esasen başladığımız noktada ufak bir değişiklik bir oyunu ilk hamle avantajı olan bir oyundan ikinci hamle avantajı olan bir oyuna çevirebilir.

Şimdi bugün, o oyundan biraz daha büyük bir ders çıkarmak istiyorum. Bu oyun sadece bazen ilk hamle avantajının olduğu bazen de ikinci hamle avantajının olduğu bir oyun değil, ama daha da fazlası ne zaman ilk hamle avantajı ne zaman ikinci hamle avantajı olduğunu biliyorduk. Doğru mu? O taşların ilk durumlarına baktığımızda, hemen onun Oyuncu 1 tarafından kazanılacak bir oyun olduğunu biliyorduk veya tam tersi Oyuncu 2 tarafından kazanılacak bir oyun olduğunu biliyorduk. Şimdi aslında bunun oldukça genel bir fikir olduğu ve aslında bir ismi olduğu ortaya çıkıyor ve bu isim de Zermelo. Bugün Zermelo adında bir adamın ortaya koyduğu bir teoremden bahsedeceğiz ve bu teoremin fikri şu.

NIM'den daha genel oyunlara bakacağız ve şu soruyu soracağız, hangi durumlarda Oyuncu 1'in, ilk hamle yapan oyuncunun kazanmaya zorlayabileceğini veya Oyuncu 2'nin kazanmaya zorlayabileceğini veya üçüncü bir olasılık olarak beraberlikle biteceğini bilebiliriz? İşte teorem şu, geçen sefer baktığımız oyunlardaki gibi iki oyuncu olduğunu farz edelim ve diyelim ki – bunu şimdi resmi olarak tanımlamayacağım – ama diyelim ki oyun mükemmel bilgili bir oyun. Mükemmel bilgi ile ne demek istiyorum? Derste daha sonra tanımını vereceğim, ama şimdilik şunu demek istiyorum, bir oyuncuya hamle sırası geldiğinde, ona sıra gelmeden önce oyunda neler olup bittiğini tam olarak bilir.

Örneğin, bu bakmakta olduğumuz tüm bu ardışık oyunlar mükemmel bilgili oyunlardır. Bana sıra geldiğinde dün senin ne yapmış olduğunu tam olarak bilirim, dünden önce kendimin ne yapmış olduğunu bilirim vesaire. Yani bu mükemmel bilgili bir oyun. Oyunda sınırlı sayıda nodlar olduğunu varsayacağım. Burada iki şey var, bu sonsuza dek süremez, bu oyun ve ayrıca sonsuz bir şekilde dallanmasının da bir anlamı yoktur. Yani sınırlı sayıda nod var ve oyunun üç olası sonucu olduğunu varsayacağız. Aslında bu teoremin daha genel bir versiyonu var ama şimdilik bu iş görür.

Üç olası sonuç şunlardır, ya Oyuncu 1 kazanır, hadi buna W1 diyelim (win kelimesinin baş harfi), veya Oyuncu 1 kaybedebilir ki bu Oyuncu 2 kazanır demektir veya berabere biter. Yani oyun – geçen seferki iki olası sonucu Olan NIM'e benziyor. Yani burada 3 sonuç arayacağız veya daha az sonuç demeliyim. Bunlar koşullar ve bu da sonuç. 3 demiştim, 3 olabilir ama burada 2 de olabilirdi, ben sadece 3 olmasına izin veriyorum (bir tanesi önemsiz). BU koşullar altında şu doğrudur.

Ya Oyuncu 1 kazanmaya zorlayabilir, yani ya bu oyun Oyuncu 1'in iyi oynadığı takdirde, Oyuncu 2 ne yaparsa yapsın oyunu kazanacağı bir durumdur. Veya 1 en azından beraberliğe zorlayabilir ki bu da Oyuncu 2 ne yaparsa yapsın Oyuncu 1 beraberliği garanti edecek şekilde oynayabilir. Veya bu Oyuncu 2'nin 1'i kaybetmeye zorlayabileceği bir oyun olabilir. Yani bu teorem ilk bakışta fazla bir şey söylemiyor gibi geliyor. Bu şeye bakıyorsunuz – biz zaten sadece 3 olası sonucu, kazanmak, kaybetmek veya beraberlik olan oyunlara baktığımızı biliyorduk yani bu teoreme bakınca hiçbir sürpriz olmadan şunu söylüyor ya kazanacaksınız, ya kaybedeceksiniz veya berabere kalacaksınız.

Ancak, teoremin söylediği tam olarak bu değil. Teorem şunu söylüyor sadece oraya varmakla kalmayacaksınız – bunu zaten biliyorduk – ama oyunlar kendilerini ayırıyor. Bu şekildeki oyunlar kendilerini Oyuncu 1'in Oyuncu 2 ne yaparsa yapsın kazanmasının bir yolu olan; veya Oyuncu 1'in Oyuncu 2 ne yaparsa yapsın beraberliğe zorlayabileceği bir yolu olan; veya Oyuncu 2'nin Oyuncu 1 ne yaparsa yapsın kazanmasının bir yolu olan oyunlar diye ayırırlar.

Hadi NIM'e geri dönelim bu noktayı ortaya koymak için. NIM'de esasen beraberlik yok yani bunların ortada olanını unutabiliriz ve NIM'de belli bazı durumlarda Oyuncu 1 kazanmayı zorlayabilir. Durumun ne olduğunu hatırlayan var mı, Oyuncu 1'in kazanmaya zorlayabileceği? Birlileri? Geçen sefer oynayan kişiler. Hayır, evet, Ali şurada birisi var. Bağırın.

Öğrenci: Diğer oyuncuya geldiğinde öbeklerin eşit olmasını sağlamak.

Profesör Ben Polak: Pekâlâ, yani eğer öbekler eşit başlamazsa, o zaman Oyuncu 1 gerçekten kazanmayı zorlayabilir. 2'nin ne yaptığının esasen hiçbir önemi yoktur, 2 ezilir. Veya alternatif durumda eğer başlangıçta öbekler eşittir ve eğer başlangıçta öbekler eşitse bu kes Oyuncu 1 ezilir. Oyuncu 2 daha çok Oyuncu 1'i kaybetmeye zorlayabilir, yani Oyuncu 2'nin kazanmasına. Herkes bunu geçen seferden hatırlıyor mu? Bu, hafta sonundan az önceydi, aradan o kadar çok zaman geçmedi.

Bu teorem bu şekildeki tüm oyunlara uyar. Peki, hangi oyunlar bu şekildedir? Başka örnekler düşünmeye çalışalım. Bir örnek tic-tac-toe (SOS). Herkes tic-tac-toe kurallarını biliyor mu? İngiltere'de biz buna Hiçlikler ve Çarpılar (Noughts and Crosses) deriz ama siz tic-tac-toe diyorsunuz değil mi? Herkes tic-tac-toe nun ne olduğunu biliyor mu? Evet, tic-tac-toe hangi kategoridedir? Bu Oyuncu 1'in kazanmayı zorlayabileceği bir oyun mudur veya Oyuncu 1'in sadece beraberliğe zorlayabileceği kategoride midir veya ikinci hamle yapan olmayı yeğleyeceğiniz ve Oyuncu 2'nin kazanmayı veya Oyuncu 1'in kaybetmesini zorlayabileceği bir kategoride midir? Hangisidir tic-tac-toe?

Hadi elleri görelim. Kimler tic-tac-toe nun Oyuncu 1'in kazanmayı zorlayabileceği bir oyun olduğunu düşünüyor? Kimler tic-tac-toe nun Oyuncu 1'in sadece beraberliğe zorlayabileceği bir oyun olduğunu düşünüyor? Kimler Oyuncu 2'nin kazanacağını düşünüyor? Çoğunuz haklısınız. Bu öyle bir oyun ki eğer insanlar doğru oynarlarsa ortaya beraberlik çıkar. Oyuncu 1 hala hata yapabilir, bu durumda oyunu kaybedebilir. Oyuncu 2 hata yapabilir, bu durumda kaybedebilir, ama beraberliğe zorlayan bir oyun şekli vardır. Bunlar oldukça basit oyunlar, hadi daha karmaşık oyunlardan bahsedelim.

Peki ya dama oyunu nasıldır? Dama oyunu bu koşulları karşılıyor. İki oyunculu bir oyun. Kendi sıranız gelmeden önceki tüm hamleleri hep bilirsiniz. Sonlu bir oyun: dama oyununda sonsuza dek sürmesini engelleyecek kurallar vardır. Ve 2 veya 3 sonucu vardır: sanırım üçüncü bir sonuç var, eğer bir döngüye girerseniz o zaman beraberedir. Yani dama tüm bu tanımlamalara uyuyor ve bu teorem bize damanın bir çözümü olduğunu söylüyor. Bu çözümü bildiğimden veya yakın zamanda birisinin gerçekten çözdüğünden emin değilim, son birkaç ayda bile, bu sabah Google'da aramak için kendime hatırlatmayı unuttum.

Ama bunu çözümleyen insanlardan önce bu teorem bize şunu söylüyor: damanın bir çözümü vardır. Hadi biraz daha hırslı olalım. Peki ya satranç? Satranç da bu tanıma uyuyor. Satranç iki kişilik bir oyun, herkes kendilerinden önceki hamleleri bilir, ardışıktır, sınırlı sayıda hamle vardır, çok büyük bir sayıdır ama sınırlıdır ve 3 olası sonucu vardır, kazanmak, kaybetmek veya beraberlik. Dikkatli olalım burada, sonlu olmasının nedeni – tam ne olduğunu unuttum -- eğer 3 kez döngüye girerseniz o zaman oyunda beraberlik ilan ediliyor, berabere bitiyor. Peki, bu teorem bize ne söylüyor? Bize satrancı çözmenin bir yolu olduğunu söylüyor. Satrancın bir çözümü var.

Bu çözümün ne olduğunu bilmiyoruz. Bu beyaz taşların sahibi Oyuncu 1'in kazanmayı zorlayabileceği bir durum olabilir. Oyuncu 1'in sadece beraberliğe zorlayabileceği bir oyun olabilir ve hatta Oyuncu 2'nin kazanmayı zorlayabileceği bir oyun olabilir. Hangisi olduğunu bilmiyoruz, ama bir çözüm var. Bu teorem de bir bit yeniği var. Nedir bu bit yeniği? Bit yeniği şudur bize aslında – teorem aslında bize çözümün ne olduğunu söylemiyor. Bize nasıl oynamamız gerektiğini söylemiyor. Bu teorem haddizatında bize nasıl satranç oynamamız gerektiğini söylemiyor. Sadece bize satranç oynamanın bir yolu var diyor.

Bunu ispatlamaya çalışacağız. Sınıfta sık sık ispat yapmıyoruz, ama bu ispatı yapmak istememin nedeni bu ispatın Yale'deki kantitatif akıl yürütme (QR:

quantitative reasoning) dersleri için öğretici olduğunu düşünüyorum. İşte başka bir örnek ve bazı başka örnekler. Satrancın en dramatik örnek olduğunu düşünebilirsiniz. Bugün bunu ispatlamaya zaman harcamak istememin nedeni bunu çıkarım ile yapacak olmamız ve bu ispatın taslağını çıkaracağım. Olası her bir adımın üzerinden gitmeyeceğim, ama buradaki insanlara çıkarım ile ispatın nasıl olduğu hissini vermeye çalışacağım. Bunun nedeni şu, benim tahminim şu, hadi bir bakalım, kaçınız daha önce çıkarım ile bir ispat gördü? Kaçınız görmedi?

Görmemiş olanlarınız için, sanırım hayatta iyi bir şey, hayatınızın bir noktasında çıkarım ile ispat görmek iyi bir şey ve görmüş olanlarınız için benim tahminim onu lisede berbat bir matematik dersinde görmüşsünüzdür ve aklınız almamıştır – aklınız almamasından ziyade heyecanı sizi sarmamıştır. Bu ilginç gelebileceği bir bağlam olabilir. Çıkarım yoluyla ispat. Bu çıkarım yoluyla ispatı oyunun maksimum uzunluğunda yapacağız ve buna N diyeceğiz. Oyunun maksimum uzunluğuna N diyeceğiz. Bununla ne demek istiyorum? Eğer bir ağaç çizseydim her zaman bu ağacın başlangıcından ağacın sonuna kadar olan tüm patikalara bakabilirdim. Ve bu belirli ağaçta e fazla uzunluğa sahip patikaya bakacağım ve buna o oyunun uzunluğu diyeceğim, oyunun maksimum uzunluğu.

Yani oyunun maksimum uzunluğunda çıkarım yapacağız. Peki, çıkarım yoluyla ispata nasıl başlarız? Hadi kendimize hatırlatalım, bunu daha önce görmüş olanlar. Biz bu teoremin doğru olduğunu ispatlayacağız, bu teoremdeki iddia kolay durum için, oyunun uzunluğu 1 hamle iken doğru. Bu ilk adım ve sonra bunun uzunluğu < = N olan tüm oyunlar için doğru olduğunu kanıtlamaya çalışacağız, bu N her ne ise, o zaman bu aynı zamanda uzunluğu N+1 olan oyunlar için de doğru olmalıdır. Çıkarım ile ispat yapmanın yolu budur. Hadi pratikte nasıl görünüyor bir bakalım.

Kolay adımla başlayalım ve bunu biraz detaylı yapacağız bir matematik dersinde ihtiyacınız olduğundan daha fazla detay ile. Eğer N=1 ise bu oyunlar nasıl görünür? Hadi burada bazı örneklere bakalım. Eğer N=1 ise bunun çok abes olacağını iddia ediyorum ama yine de yapalım. Oyun şöyle görünebilir. Oyuncu 1 hamle yapacak – işte Oyuncu 1 hareket ediyor – oyunun uzunluğu sadece 1 – yani zaten tek hareket edecek kişi Oyuncu 1. Oyun şöyle görünebilir. Hadi beşinci bir dal daha koyalım, böyle görünebilir. Ve oyunun sonunda, getirileri koymak yerine sonuçları koyayım.

Sonuç ya kazanmak, ya beraberlik ya da kaybetmek olmak zorunda, diyelim ki böle görünüyor. Diyelim ki burası kazanmak veya burada beraberlik elde edebiliriz veya burada yine kazanabiliriz veya burada kaybedebiliriz ve burada berabere kalabiliriz. Yani bu oyunda iddia ediyorum ki bu oyunun bir çözümü olduğu çok açık. Oyuncu 1'in ne yapması gerektiği oldukça açık. 1 Ne yapmalı? 1 kazanmayla sonuçlanan seçeneklerinden birini seçmeli. Dikkatli olmak için buraya 1 koyacağım ki kimin kazandığı kimin kaybettiği anlaşılsın.

Bu oyunda, bu oyunun çok açık bir çözümü olduğunu ileri sürüyorum, Oyuncu 1 ya kazanmaya giden bu dalı seçecek veya kazanmaya giden bu dalı seçecek ve her iki durumda da Oyuncu 1 kazanacak. Bu açık mı? O kadar açık ki acı veriyor. Yani bu oyundaki iddiam, aslında biz bu ilk nodu ne olacaksa, bu durumda 1 kazanır, onunla değiştirebiliriz. Doğru mu? Bu kolaydı. Farklı bir örneğe bakalım, 3 yapacağız.

İşte olası bir başka örnek ve bu yine, Oyuncu 1 burada hamle yapacak ve bu kez olası sonuçlar beraberlik veya kayıp veya kayıp. Bir kez daha tek oyunculu bir oyun, bu kez 3 seçeneği var ve bu üç sonuç beraberliğe veya kaybetmeye veya kaybetmeye yönlendiriyor ve yine bunun basit olduğunu iddia ediyorum. Oyuncu 1'in yapacağı nedir? Beraberliği seçmek çünkü kazanmanın hiçbir yolu yok. Ama bu durumda gerçekten buna zorlayabilir. Gerçekten de beraberliği seçip berabere kalabilir. Yani bu oyunun beraberliği seç diye bir çözümü var. Ve yine, oyunun ilk nodunu gerçekten sonuçta ne olacağıyla, bu durumda beraberlikle, değiştirebiliriz. Herkes mutlu mu?

Sanırım bir başka olasılık daha var. Bu başka ihtimal şu Oyuncu 1'in birçok seçeneği var, belki de bu durumda 4 seçenek, bir kez daha Oyuncu 1 hamle yapacak ama her durumda – Oyuncu 1 için talihsizlik – her sonuçta Oyuncu 1 kaybeder. Bu Oyuncu 1'in ne yaparsa yapsın kaybedeceği bir oyun. Bir kez daha bir çözüm var: çözüm Oyuncu 1'in ezilecek ve kaybedecek. Bunun gerçekten uzunluğu 1 olan tüm oyun ihtimallerini kapsadığını ileri sürüyorum. Demek istediğim, bunlarda daha fazla dal olduğunu hayal edebilirsiniz, ama temelde bu üç ihtimal var.

Ya bu dallardan birisi kazanmaya yönlendirecek, bu durumda çözüm Oyuncu 1 kazanır olur; ya hiçbir dalda kazanmak yoktur, ama bir tanesinde beraberlik vardır, bu durumda Oyuncu 1 berabere kalır veya tüm dallarda kaybetmek vardır, bu durumda Oyuncu 1 kaybeder. Ben 1 uzunluğundaki oyunlarla işimin bittiğini öne sürüyorum Herkes tamam mı? Bu adım kandırıcı bir şekilde kolaydı ama işte böyle. Pekâlâ, şimdi çıkarım adımını, büyük adımı atalım. Yapacağımız şey şu, teoremin şu ifadesinin doğru olduğunu varsayacağız, maalesef ben onu saklamışım – bulabilirsem ortaya çıkarayım, bu kolay olmayacak. Şimdi görünüyor mu?

Şimdi teoremin bu ifadesinin uzunluğu < = N olan tüm oyunlar için doğru olduğunu varsayalım, diyelim ki durum bu. Diyelim ki bu iddia bu tipteki uzunluğu < = herhangi bir N olan tüm oyunlar için geçerli. Göstermemiz gereken şey şudur – göstermeye çalışacağımız şey bu yüzden bunun N+1 uzunluğundaki tüm oyunlar için doğru olduğudur. Göstermek istediğimiz şey – iddia ediyoruz ki, bu yüzden, uzunluğu N+1 olan tüm oyunlar için de doğrudur, bu çıkarımsal ispatlardaki anahtar adımdır. Pekâlâ, bunu nasıl yaparız? Hadi uzunluğu N+1 olan bir oyuna bakalım ve burada binler kullanamayacağım açık bu yüzden göreli küçük rakamlardan seçeyim, ama fikir hepsine uyar. Hadi bir oyuna bakalım.

İşte bu Oyuncu 1'in ilk hamleyi yaptığı bir oyun, Oyuncu 2 ikinci hamleyi yapıyor. Diyelim ki eğer Oyuncu 2 bunu yaparsa o zaman 1'in burada az seçeneği var, bu yukarıda o zaman 1'in daha karmaşık seçenekleri var ve belki de Oyuncu 2 tekrar hamle yapabilir. Yani bu yukarıdaki bayağı karışık bir oyun ve bu aşağıdakini daha az karışık yapalım. Burada oyun böyle görünüyor ve sonra bitiyor, yani ağacımız böyle görünüyor. Sonunu koymamıştım, sonuçları üzerine yerleştirmedim ama ağaç böyle görünüyor. Bir kere bu ağacın uzunluğu ne? Bu ağaçtaki en uzun patikanın, başlangıçtan sonuna kadar 4 adımı olduğunu ileri sürüyorum. Hadi kontrol edelim. 1, 2, 3 ve 4 bunun en uzun patika olduğunu öne sürüyorum. Buradan aşağıya giden herhangi bir patika üzerinde sadece 3 hamle var, yani bu oyunun uzunluğu 4.

Bunu iddiamıza uygulayabiliriz, diyelim ki teorem 3 veya daha az uzunluktaki ağaç için geçerli yani bu N+1 4'e eşit bizim örneğimiz için. Bu örnekte – buraya yazmak istemiyorum, şuraya yazayım – bu oyunda N=3 yani N+1=4. Örneğimizde herkes bundan memnun mu? Şimdi bununla ilgili gözlemlemek istediğim şey şöyle: bu N+1'in içinde veya bu 4 uzunluğundaki oyunda veya daha az uzunluktakilerde. Bunları alt-oyunlar olarak düşünebilirsiniz. Onlar oyunun içindeki oyunlar, doğru mu? Hadi bir bakalım. Özellikle iddia ediyorum ki – etraflarının pembeyle çizeyim—burada Oyuncu 1 yukarı seçtikten sonra bir oyun var ve Oyuncu 1 aşağıyı seçtikten sonra bir oyun var, doğru mu? Yani bunların ikisi de birer oyun ve burada ne elde ediyoruz?

Buradaki küçük oyun – tepede yuvarlak içindeki oyun, Oyuncu 1'in yukarı seçimini takip eden oyun – bu bir oyun ve onun uzunluğu var. Yani bu küçük şey bir oyun ve buna bir alt-oyun diyeceğim, dönem içinde daha sonraları kullanmaya alışacağımız bir jargon. Bu oyun içinde bir oyun, ama temelde sadece bir oyun: bir alt-oyun ve 1'in yukarıyı seçmesini – şuraya yukarı yazalım—takip ediyor. Ve ben bu oyunun bir uzunluğu – bu alt-oyunun bir uzunluğu olduğunu ileri sürüyorum. Biliyoruz ki biz uzunluğu 4 olan bir oyundan başlamıştık, bir hamleyi aldık ve hadi bunun gerçekten uzunluğu 3 olan bir oyun olduğundan emin olalım. Oyun burada başladı, bu 3 uzunluğunda bir oyun olacak, çünkü 1, 2, 3 hamle gidebiliyorsunuz, doğru mu?

Yani bu 3 uzunluğa sahip bir oyun. Bu alt-oyun, 1'in yukarı seçmesini takip eden alt-oyunun uzunluğu 3. Bu aşağıda, bu da bir alt-oyun, Oyuncu 1'in aşağı seçmesini takip eden bir oyun ve bu küçük alt-oyununun uzunluğu – şimdi burada biraz dikkat etmeliyiz—uzunluğu 4 olan bir oyundan başladığımız için ilk hamleden sonra uzunluğu 3 olan bir oyunda olmalıyız diye düşünebilirsiniz. Ama aslında bu doğru değil ve eğer dikkatli bakarsak bu aşağıdaki oyunun, şuradan başlayan oyunun uzunluğu 3 değil. Onun uzunluğu 2. Doğru mu? Yani 4 uzunluğundaki bir oyundan başlamamıza rağmen, bu yöne giderek kendimizi uzunluğu 2 olan bir oyunda buluruz. Doğru mu? Yani 1, 2 veya 1, 2—her neyse—bunun uzunluğu 2'dir.

Tamam, pekâlâ yani bu oyunda N 3'tür ve N+1 4'tür ve bizim varsayımımız, bizim çıkarım varsayımımız nedir? Uzunluğu < = N olan tüm oyunlar için bu teoremin geçerli olduğunu varsaydık, bu duruma göre < = 3. Peki bu bize ne anlatıyor? Bize şunu anlatıyor, varsayımımızdan dolayı, bu oyun, şu yukarıda etrafını pembe ile çizdiğim oyun, bu uzunluğu 3 olan bir oyun, bu oyunun bir çözümü var. Bir çözümü olmalı çünkü uzunluğu 3 veya daha az. Yani dendiği gibi çıkarım hipotezine göre – çıkarım hipotezine göre – bu teknik bir terim, ama çıkarım hipotezi nedir? Buradaki şeydir. Varsayımımızdan dolayı bu oyunun bir çözümü vardır.

Yani bu uzunluğu 3 olan bir oyun, 3 < = N bu durumda. Yani bu oyunun bir çözümü olmak zorunda. Şimdi sadece buna bakarak çözümün ne olduğunu bilmiyorum, ama farz edelim ki bu W, diyelim ki bu W. Ve bu aşağıdaki oyun, bu da bir oyun, uzunluğu 2 olan bir oyun ama aynı zamanda 2 üçten küçüktür, 2 < = 3. Yani bu oyunun da bir çözümü var. Bu oyunun da, aynı varsayım dolayısıyla bir çözümü var, bunun çözümü de – bilmem ki—belki de L. Yani oyunların çözümleri var demek ne anlama gelir, bu durumda W'nun bu olduğunu varsayarsak ve L'nin bu olduğunu varsayarsak, bu ne anlama gelir? Bu şu anlama gelir, tıpkı burada yaptığımız oyunlar gibi çözümü oyunun başlangıcına koyabiliriz. Biliyoruz ki eğer bu oyuna gelirsek, bu oyunun sonucunu alacağız ve biliyoruz ki bu oyuna gelirsek, bu oyunun sonucunu alacağız. Yani bunun yerine çözümünü yazabiliriz ki varsayımımıza göre bu W ve bunun yerine de kendi çözümünü yani varsayımımıza göre L'yi yazabiliriz. Ve burada çok dikkatli olmak istiyorum, hangi oyuncu için kayıp veya kazanç olduğunu takip etmek istiyorum. Bu Oyuncu 1'in kazanmasıydı, yani Oyuncu 2'nin kaybetmesi ve bu Oyuncu 1 için kayıptı dolayısıyla Oyuncu 2'nin kazanmasıydı. Yani bu oyunlar, her birinin bir çözümü var ve bu durumda ben çözümleri W ve L olarak yazdım.

Peki, şimdi ne yapabiliriz? Şu tahtayı tekrar aşağıya alayım. Bu oyunu çok basit bir oyuna dönüştürebilirim. Bu dönüşümü yukarıda yapacağım, bu oyun şöyle dönüştürülebilir. Oyuncu 1 hamle yapar, eğer Yukarı giderse o zaman bir W'ya gelir ve eğer Aşağı giderse bir L'ye denk gelir. Yani bu belirli örnekte, Oyuncu 1 aslen etkin olarak şu ikisi arasında seçim yapıyor, Yukarı gidip kendisini bir çözümü olan bir oyunda bulmak ki bu çözümde kendisi kazanır veya Aşağı gidip kendini çözümü olan bir oyunda bulmak ki bu çözümde ezilir. Ama bu nedir? Bu tek hamleli bir oyundur. Bunun bir çözümü var, bu uzunluğu 1 olan bir oyun.

Peki, biz ne yaparız? Bir nevi şematik olarak, uzunluğu N+1 olan bir oyun aldık, bu durumda 4'tü ve gösterdik ki bir kez Oyuncu 1 ilk hamlesini yaptığında, biz uzunluğu 4'ten küçük olan, bu 3 olabilir, 2 olabilir, neyse, bir oyundayız veya alt-oyundayız diyelim isterseniz. İçinde bulunduğumuz hangi alt-oyun olursa olsun, varsayımımızdan dolayı, o oyunun bir çözümü vardır. Yani aslında bu etkin olarak Oyuncu 1'in çözümü W olan bir oyun ile L olan bir oyun arasında seçim yapmasıdır. Ve burada 15 başka alt-oyun olsaydı, her birinin çözümü olurdu ve her birinin çözümünde Oyuncu 1 kendisinin alacağı şey ile bağdaştırabilirdi.

İddia ediyorum ki, eğer bu uzunluğu 3 veya daha az olan alt-oyunların her birisinin çözümleri varsa, o zaman uzunluğu 4 olan bir oyunun da çözümü olmak zorundadır ki bu nedir? Şu çözümdür: Oyuncu 1 en iyi alt-oyunu seçmelidir. Bu adım herkesi ikna etti mi? Şu anda insanlar biraz fara yakalanmış tavşan gibi bakıyorlar bu yüzden tekrar söyleyeyim. Şu varsayımla başladık, uzunluğu 3 veya daha az olan, N veya daha az olan oyunların çözümleri vardır. Gösterdik ki uzunluğu N+1 olan herhangi bir oyun, Oyuncu 1'in başlangıç hamlesini yaptığı ve bunu uzunluğu N veya daha az olan, daha kısa olan demeliydim bir oyunun takip ettiği şeklinde düşünülebilir. N veya daha az sayıda adımı olan bu oyunların her birinin bir çözümü vardır, yani Oyuncu 1 kendisi için en iyi çözümü olan oyunu seçecektir ve işimiz burada biter.

Bu belirli örnekte, Oyuncu 1 Yukarıyı seçer ve bundan dolayı da ana oyunun sonucunda Oyuncu 1 kazanır. Şimdi sanırım çıkarım yoluyla ispatlarda en zor adım işi bitirdiğinizi fark etmektir. Yani şimdi işimizin bittiğini öne sürüyorum, neden işimiz bitti? Biliyoruz ki uzunluğu 1 olan oyunların tümünün bir çözümü olduğu çok kolaydı. Bu oldukça basitti. Ve göstermiş olduk ki uzunluğu N veya daha kısa olan herhangi bir oyunun bir çözümü vardır, o zaman N+1 uzunluktaki oyunların da çözümü vardır.

Şimdi bakalım nasıl devam edebiliriz. Biliyoruz ki uzunluğu 1 olan oyunların bir çözümü var, bu yüzden hadi uzunluğu 2 olan oyunları ele alalım. Uzunluğu 2 olan oyunlar, uzunluğu 2 olan oyunların bir çözümü var mı? Bir bakalım, N=1. Biliyoruz ki eğer uzunluğu 1 olan oyunların bir çözümü varsa, o zaman uzunluğu 2 olan herhangi bir oyun bir başlangıç adımı ve onu takip eden 1 uzunlukta bir oyun olarak düşünülebilir, ama bunun bir çözümü var, işte bu yüzden 2 uzunluktaki oyunların da çözümü vardır. Şimdi uzunluğu 3 olan oyunları ele alalım, göstermiştik ki 1 uzunluktaki oyunların çözümü var ve 2 uzunluktaki oyunların çözümü var. Uzunluğu 3 olan herhangi bir oyun bir başlangıç adımı ve onu takip eden ve çözümleri olan ya 1 uzunluğunda veya 2 uzunluğunda oyunlar olarak düşünülebilir, yani bir kez daha uzunluğu 3 olan bir oyunun da çözümü vardır vesaire.

Çıkarım oyunları, oyunun uzunluğu üzerine yapılarak işlerler ve sonunda bitirdiğimizi anlarız. Daha önce çıkarım yoluyla ispat görmemiş olanalar endişe etmesinler sınavda onları çıkarım ile test etmeyeceğim, ben sadece bir tane görmenizi istedim. Hadi hep beraber derin bir nefes alalım ve bunu bir oyun oynayarak hazmetmeye çalışalım. Bunu yukarıda bırakacağım, böylece ona bakabileceksiniz. Daha sonra onu tekrar aşağıya almak isteyeceğiz. Hadi gerçekten bir oyun oynamaya çalışalım ve buna biraz olsun ışık tutabilir miyiz görelim.

Geçen sefer yaptığım gibi gönüllüler seçeceğim, ama ilk olarak size oyunun ne olduğunu söyleyeyim. Bir kez daha bu oyunda kayalarım olacak ve bir kez daha bu kayaları tahtadaki çizgilerle betimleyeceğim. İşte bir örnek. Örnek şu. Oyunda kaya dizileri var, buradaki dizide 5 satır ve 3 kolon var. Yani kayalar önceki örnekteki gibi öbek öbek durmuyorlar, ama daha çok bir bakıma hoş dizi olarak duruyorlar. Daha eşit aralıklı yapmalıydım ama bu şöyle: 1, 2, 3, 4, 5 satır ve 1, 2, 3 kolon, en azından bu örnekte. Ama genelde bir dizi NxM kaya var.

Bunu oyuncular ile ardışık olarak oynayacağız. Ve oyunun işleyişi şöyle olacak – sıra size geldiğinde, bu kayalardan birini işaret edeceksiniz ve ben hangi kayayı işaret ettiyseniz onu kaldıracağım. O kayayı ve onun üstünde veya sağında kalan kayaları sileceğim: kuzeydoğusunda kalan kayaların hepsini sileceğim. Örnek olarak, eğer bu kayayı göstermişseniz, o zaman bu kayayı ve ayrıca bunu ve bunu kaldıracağım. Eğer sıradaki kişi gelip bunu seçerse, o zaman bunu sileceğim ve ayrıca bunu sileceğim. Tamam, herkes anladı mı? Pekâlâ, oyun -burası önemli- son kayayı alan kişi oyunu kaybetmiş olacak. Kaybeden son kayayı kaldıran olacak.

Bazı gönüllüler alabilir miyim? O zaman ben insanları gönüllü yapabilir miyim? Şuradaki üzerinde sarı renk olan beyaz tişörtlü arkadaş nasıl? Tamam, öne doğru gelin ve başka kimi gönüllü yapabilirim? Herkes bakılarını benden kaçırıyor, ümitsizce bakışlarını kaçırıyorlar. Şurada üzerinde Yale tişörtü, Yale Futbol tişörtü olan arkadaş nasıl, tamam. Yukarı gel. İsmin neydi? Bir mikrofon almalıyım, buraya bir mikrofon alayım, teşekkürler. Harika, isminiz nedir?

Öğrenci: Noah.

Profesör Ben Polak: Noah ve sizin isminiz?

Öğrenci: Koran.

Profesör Ben Polak: Mikrofona söyleyin.

Öğrenci: Koran.

Profesör Ben Polak: Koran, peki. Noah ve Koran bizim oyuncularımız. Herkes kuralları anladı mı? Kuralları anladınız mı? Evet? Peki, neden ilk hamleyi Noah'a yaptırmıyoruz. Noah, hangi kayayı kaldırmak istersin? Hatırlarsan son kaya kaybeder.

Öğrenci: Buradaki.

Profesör Ben Polak: Buradaki. Tamam, Noah bunu seçti. Yani bunu sileceğim ve üstündekini sileceğim.

Öğrenci: Yani kuzey ve doğuda kalan tüm kayalar siliniyor değil mi?

Profesör Ben Polak: Kuzey ve doğuda kalan tüm kayalar siliniyor. Bu demek ki sen – son kaya kaybeder. Tamam güzel.

Öğrenci: Buradaki.

Profesör Ben Polak: Buradaki, tamam. Yani şimdi bir L şeklimiz var.

Öğrenci: Buradaki.

Profesör Ben Polak: Buradaki, pekâlâ.

Öğrenci: Buradaki.

Profesör Ben Polak: Buradaki, tamam, tamam. Pekâlâ, işimiz bitti. Tamam, herkes bunun nasıl çalıştığını anladı mı? Oyuncularımız için bir alkış lütfen, teşekkürler. Şimdi herkes görmüşken iki gönüllü daha alayım. Bu arkadaşların işi zordu, onlar ne olduğunu sıfırdan anlamak zorundaydı. İki gönüllü daha? Ben gönüllü seçmek zorunda değilim – burası Yale, birleri gönüllü olur. Siz gönüllü müsünüz? Harika. Bir gönüllüm var. Bir rakip seçebilirsin istersen, İşte böyle. Teşekkürler. İsminiz neydi, mikrofonlar buraya gelene kadar bekleyelim. İsminiz nedir?

Öğrenci: Peter.

Profesör Ben Polak: Peter ve sizin ki de Justin.

Öğrenci: Justin.

Profesör Ben Polak: Buraya farklı bir dizin koymama izin verin. Bu yukarıya yeni bir dizi koyalım ve bu kez onu şöyle yapalım – tek sayı olmak zorunda değil. Bu kez biraz daha karışık yapalım. 5 tane – hadi 4 satırımız ve 5 kolonumuz olsun bu kez. Peki, geçen sefer 5 satır ve 3 kolon vardı ve bu sefer 4 satırım ve 5 kolonum var. Siz çekilin, ben aradan çıkayım. Neden tahtaya daha yakın durmuyorsunuz – böylece insanlar burada neler olduğunu daha rahat görebilirler, işte böyle. Peter sen başlamak ister misin?

Öğrenci: Tabii ki, şuradaki.

Profesör Ben Polak: Buradaki tamam. Yani bu gider, bu demek oluyor ki buradakilerin hepsi de gider. Aşağıdan tavsiyeci olan var mı? Bağırın, yeterince yüksek değil.

Öğrenci: Ben buraya gitmeyi deneyeceğim.

Profesör Ben Polak: Burası. Tamam, L şeklimize geri döndük. Şimdi insanlar neler olduğunu görebilirler, pekâlâ.

Öğrenci: Ben buraya gidip biraz hızlandıracağım.

Profesör Ben Polak: Pekâlâ teşekkürler. Yine bir alkış alalım. Teşekkürler arkadaşlar. İşte bu oyunla ilgili öne süreceğim şu. Birincisi ve bu resmi bir iddia değil, bu geçen sefer oynadığımızdan çok daha zor bir oyundu değil mi? Herkes buna ikna oldu mu, pekâlâ. İşte size bir egzersiz veya daha ziyade bir meydan okuma. Bu hafta bunu problem ödevine de koyabilirim, ama sadece şunu söyleyeyim eğer bunu bu haftaki problem ödevine koyarsam, hepinizin çözmesini beklemiyorum. Yani eğer bunu problem ödevine koyarsam bu opsiyonel bir problem olur.

Ama işte meydan okuma, meydan okuma şu, Zermelo'nun teoreminden biliyorum ki N ne olursa olsun ve M ne olursa olsun, bu oyunun bir çözümü vardır. Zermelo'nun teoremi bize bu oyununun bir çözümü olduğunu söylüyor. Şimdi, fark ederseniz N ve M'ye bağlı olarak, ne kadar satır ve ne kadar sütun olduğuna bağlı olarak farklı çözümler olabilir, doğru mu? Yani N ve M'ye bağlı olarak bu şekildeki her bir oyunun çözümü vardır – doğru mu—N ve M'ye bağlı olabilir, satır ve sütun sayısına bağlı olabilir. Yani aynı NIM'de öbeklerin nasıl başladığına bağlı olduğu gibi. Peki, ev ödevi ne olacak? Çözümü bulun. Ödev – çözüm nedir?

Ben şunu ileri sürüyorum, size bir ipucu vereyim, bir çözüm olduğunu hatırlamanın faydalı olduğunu ileri sürüyorum. Bunu hatırlamak çok faydalı olacaktır. Bu fazla bir ipucu değildi. Bunu zaten biliyordunuz, ama sadece bunu vurgulayayım.

Tamam, şimdi biraz uzaklaşalım istiyorum bu satranç gibi ve dama gibi olan oyunlardan ve bu kayalar veya NIM gibi oyunlardan. Ve bir süreliğine daha resmi olmak istiyorum. Bir süredir yapmadığımız bir şey, aslında ara sınavdan beri gerçekten de hiç resmi tanımlar yazmadık. Bu yüzden şimdi bunu yapacağım. Bu tahtalardan en azından birini geri istiyorum. Dersin en başlarında uyardığım gibi, günün bazı kısımlarında durup biraz iş yapmamız gerekecek ve önümüzdeki yirmi dakikaya yakın bir süre böyle bir kısım. Peki, bu nedir? Bu resmi şeyler.

İlk olarak yapmak istediğim şey bugün çoktan belirtmiş olduğum bir şeyin tanımını size vermek ve bu da mükemmel bilgi fikridir. Şimdiye kadar – veya en azında ara sınavdan beri bakmakta olduğumuz oyunlar mükemmel bilgili oyunlardı. Mükemmel bilgili bir oyun tüm nodlarda veya oyundaki her bir nodda hamle sırası gelen oyuncunun o nodda bulunduğunu bilmesidir. Yani bu çok basit bir fikirdir. Ara sınavdan itibaren gördüğümüz tüm oyunlarda bu özellik vardır. Bu oyunu oynarken nerede olduğunuzu bilirsiniz. Yani hangi nodda olduğunuzu bilirsiniz, seçeneklerinizin neler olduğunu bilirsiniz ve bu zımnen şu anlama gelir oraya nasıl geldiğini biliyor olmalıdır.

Yani oyununun tüm geçmişi herkes tarafından gözlemlenmiştir. Bana hamle sırası geldiğinde senin dün ne yaptığını biliyorum, dünden önceki gün kendimin ne yaptığını biliyorum ve eğer bir üçüncü kişiyle de oynuyorsam ondan önceki gün ne yaptıklarını biliyorum. Yani çok basit bir fikir ama geriye dönük çıkarım gibi şeyleri çok kolay kullanmamıza izin veren bir fikir. Şimdiye kadar şu tip oyunlar hakkında düşünüyorduk, tam rekabet, pardon firmalar arası miktar rekabeti gibi veya teşvikler yarattığımız oyunlar gibi veya NIM gibi ve bu oyunları oldukça gayri resmi bir şekilde geriye dönük çıkarımı kullanarak çözüyorduk.

Şimdi eklemek istediğim şey ise bu oyunlardaki stratejiler için notasyon. Elimizde eş anlı oyunlar varken stratejiler esasen hiç problem yaratmıyorlardı. Stratejilerin neler olduğu çok açıktı. Ama elimizde bir zaman periyodu süresince devam eden ardışık oyunlar varsa ve bilgi zamanla ortaya çıkıyorsa stratejiyle neyi kastettiğimize dikkat etmeliyiz. Yapmak istediğim şu, saf stratejiyi en azından şöyle tanımlamak istiyorum. Yani mükemmel bilgili bir oyunda Oyuncu i'nin saf stratejisi – yani şimdiye kadar konuşmakta olduğumuz ve ağaçlarla temsil edebildiğimiz oyunlarda nedir? Tam bir aksiyon planıdır.

Bir başka deyişle yaptığı şudur, i'nin her bir nodunda, i'nin her bir karar nodunda, i'nin hangi aksiyonu alması gerektiğini belirler – hadi buna alması gerektiğini demeyelim – buna alacağı diyelim. Bu tanımı ilk kez okuduğunuzda tamamen ilgi çekici olmayan ve problemsiz gibi görünür. Oyuncu i için saf strateji bu oyunda ne zaman hamle sırası her ne zamansa geldiğinde nasıl hareket edeceğinizi söyler. Yani eğer oyunda üç kez hamle yapacaksanız, ilk seferinde nasıl hareket edeceğinizi, ikinci sefer nasıl hareket edeceğinizi ve üçüncü sefer nasıl hareket edeceğinizi söyler. Yani, şimdiye kadar bunların hiçbirisi zor görünmüyor ama aslında göründüğünden daha zordur. Hadi bir bakalım.

Yapmak istediğim şey bir örneğe bakmak ve bu örneğin bu tanımla ilgili bazı incelikleri ortaya koyacağını umuyorum. İşte bir örnek. Bu örnekte Oyuncu 1 ilk hamleyi yapıyor ve İçeri veya Dışarıyı seçebiliyor veya isterseniz bunlara Yukarı ve Aşağı diyelim çünkü bu şekilde çizdik. Yani Yukarıyı (Up) veya Aşağıyı (Down) seçebilirler – ve ben büyük harfler U ve D'yi kullanacağım. Eğer oyuncu U seçerse o zaman Oyuncu 2'ye sıra gelir ve Oyuncu 2 L veya R seçebilir (Left veya Right). Eğer Oyuncu 1 U seçer ve bunu takiben Oyuncu 2 L seçerse, o zaman Oyuncu 1'e sıra gelir, bu durumda Oyuncu 1 Yukarı veya Aşağı seçebilir ve bu kez küçük harfler kullanacağım, u ve d.

Hadi oyuna bazı getiriler koyalım. Getiriler şöyle 1, 0 burada, 0, 2 burada, 3, 1 burada ve 2, 4 burada. Yani kâğıt üzerinde – tahtada – buna ilk kez baktığınızda bu mükemmel basit bir oyun. Ara sınavdan beri bakmakta olduğumuz pek çok oyun gibi. Bir ağacı var. Geriye dönük çıkarım ile analiz edebiliriz ve bir dakika içinde geri dönük çıkarım ile analiz edeceğiz. Ama önce yapmak istediğim şey şunu sormak bu oyundaki stratejiler nelerdir? Hadi Oyuncu 2 ile başlayalım çünkü o daha kolay. Burada Oyuncu 2'nin stratejileri neler? Oldukça basit: Oyuncu 2'nin sadece bir karar nodu var – işte Oyuncu 2'nin karar nodu burada—ve strateji Oyuncu 2'ye bu karar nodunda ne yapacağını söylemeli. Sadece iki seçenek var, L veya R. Yani Oyuncu 2'nin stratejileri ya L ya da R.

Ancak burada hemen bir inceliği fark edelim. Oyuncu 2 bu seçimi hiç yapmama durumuna gelmeyebilir. Oyuncu 2 L veya R seçiyor, ama Oyuncu 2 bu seçimi hiç yapmama durumuna gelebilir. Özellikle, eğer Oyuncu 1 D seçtiyse Oyuncu 2'nin L veya R seçiminin bir geçerliliği yoktur. Yine de, strateji Oyuncu 2'den bu hamleyi yapması istendiğinde ne yapacağını belirtmelidir. Şimdi Oyuncu 1'in stratejilerine bakalım. Bu oyunda Oyuncu 1'in stratejileri nelerdir? Yanıtlamak isteyen? Tahmin etmek isteyen? Burada Oyuncu 1'in 3 stratejisi var demek çok cazip ama bu yanlış olur. Şunu söylemek çok cazip gelir Oyuncu 1 ya D oynar ki o zaman işimiz biter ya da Oyuncu 1 U oynar ve bu durumda ileride bir gün sıra tekrar kendisine gelip u veya D seçmesi istenir.

Yani burada Oyuncu 1'in sadece 3 stratejisi var demek oldukça cazip, D ve bu durumda işimiz biter veya U'yu takiben ya u ya da d, eğer o noktaya ulaştıysa. Ama aslında, eğer bu tanımı dikkatle takip edersek, Oyuncu 1'in esasen 4 stratejisi olduğunu fark ederiz. Hadi bunların neler olduğunu söyleyeyim böylece siz de bunun neden biraz garip olduğunu görürsünüz. İşte bahsettiğimiz stratejilerden birisi şu, U ve ardından u ve işte bir tane daha U ve ardından d, ama daha iki tane daha olduğunu iddia ediyorum, D ve ardından u ve D ve ardından d. Peki burada biraz tuhaf olan nedir? Tuhaf olan şu biz çok iyi biliyoruz ki eğer Oyuncu 1 D seçerse, seçim yapacak duruma gelmeyecek, ikinci seçim olan u veya d durumuna. Ama yine de strateji bize her nodda ne yapacağını söylemek zorunda, o stratejiyle o noda gerçekte ulaşılıp ulaşılmadığına bakmaksızın.

Tekrar söyleyeyim, strateji size Oyuncu 1'in o nodda ne yapacağını, o stratejiyle o noda gerçekte ulaşılıp ulaşılmadığına bakmaksızın, söylemeli. Yani biraz tuhaf. Burada gerekenden biraz fazlası var. Biraz fazlalık var. Şimdi, neden? Birazdan neden olduğunu göreceğiz. Öncelikle geriye dönük çıkarım ile bu oyunun nasıl oynanacağına bakalım. Geri dönük çıkarım ile bu oyun nasıl oynarız? Nereden başlarız? Bu hileli bir soru olmamalı, geriye dönük çıkarıma göre oyuna nereden başlarız? Sonundan. Burada son Oyuncu 1 ve Oyuncu 1 seçimini burada d olarak yapacak, doğru mu? Çünkü 3 ikiden büyüktür.

Geriye Oyuncu 2'nin hamlesine dönersek, Oyuncu 2 eğer L seçerse biliyor ki d seçecek olan Oyuncu 1 onu takip edecek, bu durumda 1 alacak, ama eğer R seçerse 2 alacak. Yani Oyuncu 2 R seçecek. Burada Oyuncu 1, eğer U seçerse o zaman Oyuncu 2 R seçecek ve Oyuncu 1 0 alacak ve eğer D seçerse 1 alacak, yani Oyuncu 1 D seçecek. Yani geri dönük çıkarım şunu önerir, Oyuncu 1 D seçer ve onu takiben Oyuncu 2 – eğer Oyuncu 2 hamle yapma durumunda olsaydı – R seçerdi, onu takiben Oyuncu 1 – eğer tekrar hamle sırası ona gelseydi – yine d seçerdi. Fark ettiyseniz geri dönük çıkarım bize Oyuncu 2'ye sıra gelmiş olsaydı ne yapmış olacağını söylemek zorunda. Geriye dönük çıkarım Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'e tekrar sıra gelseydi Oyuncu 1'in ne yapacağını düşündüğünü hesaba katmak zorundaydı.

Yani geriye dönük çıkarım yapmak için, Oyuncu 1 kendine Oyuncu 2'nin ne yapacağını sormalı ve Oyuncu 2 bundan dolayı kendine Oyuncu 1'in ne yapmış olacağını sormalı ve bu da şu demek Oyuncu 1 kendine Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'in ne yapacağını düşündüğünü sormalı, bu da şu anlama gelir biz gerçekten de Oyuncu 1'in burada ne yaptığını gerçekten söylemek zorundaydık. Bunu tekrar söyleyeyim.

Burada geriye dönük çıkarım bize şunu anlatır, Oyuncu 1 D seçer, bu durumda oyun bitmiş olur. Ama geriye dönük çıkarımı yapmak için, geriye dönük çıkarımı boylu boyunca düşünmek için, biz sadece Oyuncu 2'ye sıra gelseydi ne yapacağını değil, ama Oyuncu 2'nin aynı zamanda Oyuncu 2'ye sıra gelseydi ve L seçseydi Oyuncu 1'in ne yapacağını düşüneceğini de hesaba katmaya ihtiyacımız vardı. Yani bu fazlalık yaratan hamleler aslında geriye dönük çıkarımın parçalarıydı. İnsanların ne düşündüklerini düşünmek için onlara ihtiyacımız var.

Yani geriye dönük çıkarım bize oyunun sonucunun D olduğunu söylüyor, ama bunu stratejilere dayanarak söylüyor, Oyuncu 1 D seçer ve tekrar sıra gelseydi yine d seçerdi. Ve Oyuncu 2 R seçer. Şimdi bu oyunu tamamen farkı bir yoldan analiz edelim. Şimdi bu oyundaki stratejilerin neler olduğunu biliyoruz: Oyuncu 2'nin iki stratejisi var L ve R ve Oyuncu 1'in 4 stratejisi var: U/u, U/d, D/u ve D/d. Hadi bu oyunun matrisini yazalım, işte şöyle. Bu 4 x 2 bir matris olmak zorunda, Oyuncu 2 L ve R arasından seçimini yapıyor ve Oyuncu 1 dört stratejisi Uu, Ud, Du ve Dd arasından seçimini yapıyor ve tüm getirileri yerine koyabiliriz.

(Uu, L) bizi buraya götürür, bu da (2, 4) olur. (Uu, R) bizi buraya götürür, bu da (0, 2) olur. (Ud, L) bizi buraya götürür ve bu da (3, 1) olur. (Ud, R) bizi buraya götürür bu da (0, 2) olur. Ve Du bizi hemen oyunun dışına götürür yani (1, 0)'a gideriz. Ve aslında bu (Du, R) için de doğru ve (Dd, L) için de doğru ve (Dd, L) için de doğru. Yani bu alttaki 4 strateji de Oyuncu 1'in D seçmesiyle başladı ki bu durumda oyun bitiyor. Bir kez daha bu matriste size bahsetmiş olduğum fazlalığı görebiliyorsunuz. Bu matriste üçüncü satır, Du satırı Dd satırıyla aynı görünüyor. Herkes memnun mu?

Geçmişte matrislerimiz varken oyunu nasıl çözmüştük? Birkaç haftadır bu geriye dönük çıkarımı yapıp duruyoruz, ama ara sınavdan önce – eğer bunu size sınavda vermiş olsaydım ne yapacaktınız? Nash dengesini arayacaktınız değil mi? Hadi bunu yapalım: Nash dengesini arayalım. Eğer Oyuncu 2 L seçerse o zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi Uu olur ve eğer Oyuncu 2 R seçerse, o zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi ya Du ya da Dd olur. Tam tersi, eğer Oyuncu 1 Uu seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi L olur. Eğer Oyuncu 1 Ud seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi R olur. Eğer Oyuncu 1 Du seçerse o zaman Oyuncu 2 kayıtsız kalır çünkü her hâlükârda 0 alır ve eğer Oyuncu 1 Dd seçerse o zaman yine Oyuncu 2 kayıtsız kalır çünkü her hâlükârda 0 alır.

Bu oyundaki Nash dengeleri nelerdir? Bir tanesi burada, bu bir Nash dengesi. Bir tanesi Dd sonra R ve bu esasen geriye dönük çıkarım ile bulduğumuz Nash dengesi. Nash dengesi (Dd, R) geriye dönük çıkarımla bulduğumuza tekabül ediyor. Ama bu oyunda bir başka Nash dengesi daha var. Bu oyundaki öbür Nash dengesi şuradaki. Bu da bir Nash dengesi. Ne içeriyor? Du ve R – pardon Du ve R içeriyor. Peki, bu dengede ne oldu? Oyuncu 1 Aşağı gitti ki bu diğer her şeyi bir nevi geçersiz kılıyor. Oyuncu 2 R oynadı ve Oyuncu 1 aksiyon planına göre gerçekte u seçecekti.

Tekrar söyleyelim, Oyuncu 1 gerçekten D'ye gitti, Oyuncu 2 eğer sıra ona gelseydi R seçmiş olurdu ve Oyuncu 1 ikinci kez hamle sırası gelseydi u seçmiş olurdu. Peki, bu nasıl bir Nash dengesi olabilir? Bu geriye dönül çıkarıma denk gelmiyor. Özellikle bu yukarıda Oyuncu 1 saçma görünen bir strateji seçiyor. "d" yerine "u" seçerek 3 yerine 2 alıyorlar. Peki, nasıl oluyor da bu bir denge stratejisi haline geliyor? Nedeni şu – bir denge stratejisi olabilmesinin nedeni bu yukarıda Oyuncu 1'in ne seçtiği Oyuncu 1'in bakış açısına göre hiç fark etmiyor çünkü zaten hiçbir zaman oraya ulaşılmayacak. Burada Oyuncu 2 R seçtiği sürece, bu yukarıda Oyuncu 1'in ne yapmaya karar verdiği önemli değil. Oyuncu 1'in açısından hiç fark etmiyor. Zaten ulaşılamıyor.

Yani burada bir tehlikeye işaret ediyoruz ve tehlike şu. Bir oyunda sadece mekanik olarak Nash dengelerini bulursanız, insanların eğer hamle sırası onlara gelirse saçma aksiyonlar seçiyor olduklarını bulursunuz. Tekrar söyleyeyim, eğer bir oyunda Nash dengelerini mekanik olarak bulursanız, tıpkı burada yaptığımız gibi, bu durumda Oyuncu 1'in aksiyonu gibi, saçma aksiyonlar seçersiniz. Bizim analizimizde hayatta kalmasının nedeni zaten hamle yapma sırasının oraya gelmemesiydi. Şimdi bunu daha somut hale getirmek için bunu ekonomiden bir örneğe götürelim, aynı fikir.

Bir piyasa hayal etmek istiyorum ve bu piyasada piyasayı kontrol eden bir monopolcü var, ama piyasaya girmeyi düşünen bir kuruluş daha var. Yani şu anda piyasa bir monopol ve yerleşik firma da monopolcü – hadi buna Inc (yerleşik, "Incumbent" kelimesinin ilk 3 harfi) diyelim—ve piyasaya girmek veya dışarıda kalmak arasında karar verecek bir firma var. Eğer dışarıda kalırsa bu firma hiçbir şey almaz ve yerleşik firma tekel karı elde etmeye devam eder. Bunu yılda 3 milyon olarak düşünün.

Eğer firma girerse o zaman yerleşik firma 2 şeyden birini yapabilir. Giren firma ile savaşmayı seçebilir, bununla demek istediğim fiyatlarını düşürür, çok reklam yapar ve onu piyasa dışına sürmeye çalışır. Oldukça rekabetçi oynayabilir, bu durumda giren firma esasen kayıp yaşar ve yerleşik firma karını sıfıra indirir. Tam tersi, yerleşik firma savaşmamayı seçebilir. Eğer savaşmazsa o zaman basitçe piyasayı paylaşırlar ve ikisi de, diyelim ki Cournot karı veya düopol karı olarak 1 milyon alır. Yani bu oyunda, hadi tekrar söyleyelim, burada bir piyasa var. Monopolcü piyasada ve monopolcü yılda 3 milyon kazanıyor ki bu monopolcü için oldukça iyi görünüyor. Diğer firma bu piyasayı istila edip etmeyeceğine karar vermeye çalışıyor. Eğer bu piyasayı istila ederse, eğer savaş olursa zor duruma düşer, ama eğer monopolcü ona uyum sağlarsa o zaman düopol karı alırlar ve bu giren firma oldukça iyi olur, 1 milyon dolar kar eder.

Hadi bu oyuna bir bakalım. Analiz – ilk olarak bu kez, bunu Nash dengesi ile analiz edelim. Bu oyunda bunun çok kolay olduğunu öne sürüyorum: girenin 2 stratejisi var, direk olarak bunu matrise koyacağım. Girenin iki stratejisi var, ya girecek ya da dışarıda kalacak ve yerleşik firmanın da iki stratejisi var, bunlar savaş veya savaşma. Oyunun getirileri şöyle – hadi onları yerlerine yazalım. Gir ve savaş (-1, 0) olur, gir ve savaşma (1, 1) olur ve dışarıda kalmak yerleşik firmanın monopol karını sürdürmesine yol açar.

Hadi bu oyunun Nash dengelerine bakalım. Yapılacak ilk şey giren firmanın en iyi tepkilerine bakmak. Eğer yerleşik firma savaşmayı seçerse, o zaman diğerinin en iyi tepkisi dışarıda kalmaktır. Eğer yerleşik firma savaşmamayı seçerse o zaman rakibin en iyi tepkisi girmektir. Peki ya yerleşik firma için? Eğer rakip girmeyi seçerse o zaman yerleşik firmanın en iyi tepkisi savaşmamaktır çünkü 1 sıfırdan büyüktür. Ama eğer rakip dışarıda kalırsa yerleşik firmanın ne yapacağı fark etmez, her iki durumda da 3 alır.

Buradaki Nash dengeleri ya girmek ve ardından savaşmamak, böylece bir düopol elde ederiz veya dışarıda kal ve sonra savaş. Tabii ki savaş kısmı gerçekleşmiyor: dışarıda kalmak ve "eğer girseydin savaşırdık". Yani bunlar Nash dengeleri. Hadi bu oyunu geriye dönük çıkarım ile analiz edelim. Yerleşik firmanın bakış açısından, eğer yerleşik firmaya hamle sırası gelirse o zaman savaşmayı mı savaşmamayı mı seçecek? Savaşmamayı seçecek, bu yüzden rakip ne yapmalı? Birileri? Rakip piyasaya girmeli, çünkü eğer girerse 1 alır, eğer dışarıda kalırsa 0 alır. Yani geriye dönük çıkarım bize sadece bu dengeyi verir. Şimdi soru şu bu diğer dengeye ne oluyor? Hadi bunu konuşalım.

İşte buradasınız, piyasaya girmek üzeresiniz, Yale'den ayrıldınız, kendi işinizi kurdunuz ve sizin işiniz bir monopole veya Microsoft gibi bir monopol benzerine meydan okuyor. Ve siz oraya gidip yeni işletim sisteminizi ortaya çıkarmak üzeresiniz. Ve biliyorsunuz ki Microsoft misilleme yapmayıp fiyatlarını yarıya indirmediği ve sizi reklam ile piyasanın dışına sürmediği sürece yeni işletim sisteminiz bir sürü para kazanacak. Peki, Bill Gates ne yapar? Bill Gates Microsoft'un patronudur. Şöyle der, bir dakika dur Yale'den mezun olmadan ve işini kurmadan önce, dur da sana seninle savaşacağımı söyleyeyim. Eğer girersen savaşacağım. Ve eğer siz ona inanırsanız, eğer savaşacağına inanırsanız, ne yapmalıydınız? Bu piyasaya girmekle zaman harcamayacaktınız. Ve eğer Bill Gates tarafından savaşılacağınıza inanırsanız o zaman eğer girerseniz kayıp yaşayacağınıza inanırsınız, bu yüzden dışarıda kalmayı tercih edersiniz. Ve buradaki tehdidin Bill Gates'e hiçbir maliyeti yok, yeter ki siz dışarıda kalın ve gerçekte hiç savaşmak zorunda kalmasın. Bu nedenle bu gerçekten tasavvur edilebilecek bir denge, girerseniz savaş olacağına inandığınız için dışarıda kalmanız ve dışarıda kalacağınız bilen rakip için en iyi tepki de savaşmak. Ama bu kulağa doğru gelmiyor. Neden kulağa doğru gelmiyor? Doğru gelmiyor çünkü eğer piyasaya girerseniz savaşmanın yerleşik firmaya para kaybettireceğini biliyorken, savaşacağım diyen adama aslında inanmamalısınız. Eğer girerseniz, eğer savaşırsa 0 alır, eğer savaşmazsa 1 milyon dolar alır. Yani bu adamın sizinle savaşacağı tehdidi inanlılar değil.

Bu bir denge ama inanılır olmayan bir tehdide inanmaya dayanıyor. Eğer Microsoft'un bulunduğu piyasaya girmeyi düşünürseniz, Bill Gates'ten küçük bir e-posta alma ihtimalinizin yüksek olduğu doğrudur. (Ama bu bir e-posta olmaz çünkü mahkemeye götürülebilir, ama kulağınıza Bill Gates tarafından yapılan bazı ufak tehdit edici sözler olabilir). Eğer uçak imalatçılarının piyasasına girerseniz, Boeing’in patronu sizi arayabilir veya birilerini gönderebilir, ama bu tehditler inanılır olmayan tehditlerdir. Doğru mu? Bunlar inanılır tehditler değil çünkü biliyoruz ki eğer girerseniz, savaşmak işlerine gelmez. Bunun la ilgili bir sürü gürültü çıkarırlar ama bilirsiniz ki eğer girerseniz, geriye dönük çıkarım bize savaşmayacaklarını söyler.

Ama şimdi biraz tuhaf bir durumdayız, neden tuhaf bir durumdayız? İki şey. Bir, oyunlarda Nash dengeleri buluyor gibi görünüyoruz – bir tane burada bulduk ve bir tane yukarıda bulduk – geriye dönük çıkarım ile desteklenmeyen Nash dengeleri var. Burada endişelenmemiz için birinci neden bu ve endişe etmemizin ikinci nedeni de bunun ekonomi tarafı doğru görünmüyor. Örneğin, eğer gerçekten girseydiniz – pardon, eğer gerçekten işlem yapacağınız duyurduysanız, yeni bir işletim sistemi geliştireceğinizi duyursaydınız ve Bill Gates’ten bir tehdit telefonu alsaydınız – bu telefona inanmak için bir nedeniniz olabilir. Neden bu telefona inanabilirdiniz? Bir mikrofon alabilir miyiz, ben yaparım. Neden Bill Gates’ten sizi döveceğine dair bir tehdit alsaydınız buna inanabilirdiniz – sizi dövmek değil ama eğer yeni işletim sistemi üretirseniz fiyat kıracağına dair.

Öğrenci: Gelecekteki gelir akışına bakarsanız, yani mesela önümüzdeki 10 yıl için ve bu on yıl boyunca sürekli 1 milyon alırsa, sizi ilk yılda piyasadan çıkarıp geri kalan 9 yılda 3 milyon dolar kazanırsa daha iyi konuma gelir.

Profesör Ben Polak: Bu tam olarak benim düşündüğüm şey değildi. Tamam, doğrudur eğer biraz hile yaparsak ve bunlardan birini – Tamam, senin söylediğin şu ben sonsuza dek 3 alabilirim sonsuza dek 1 almak yerine, bunların ikisinin de gelecekteki nakit akışlarının bugünkü değerine indirgenmiş olduğunu varsayın. Yani bunun gelecekteki nakit akışı analizini yapmışız. Yani bu bir muhasebe hatası değil, muhasebeden kaynaklanmıyor. Gates’in sizi tehdit etmesinin bazı başka nedenleri var, buna inanmak isteyebilirsiniz. İlk olarak burayı deneyelim.

Öğrenci: İbret olsun diye yapabilir böylece başka kimse girmez.

Profesör Ben Polak: Doğru, şu anda Bill Gates’in aklında olan bir şey şu, sizinle rekabet etmeyi düşünüyor ama yolda daha sizden gelen çok var – ne kadarsa, bu sınıfta 280 kişisiniz bir sonraki yıl 280 kişi daha var vesaire. Ve Bill Gates biliyor ki her biriniz gelip monopolüne, Microsoft monopolüne tehdit yaratabilirsiniz. Ve içinizden birini ibretlik yaparsa diğerlerini dışarıda tutmayı başarabilir. Ve bir yerlerde bu tip argüman, birini ibretlik yapma argümanı kayıp: tamamen kayıp. Ama bu önemli olmalı, bu önemli bir fikir olmalı. Çarşamba günü geri geldiğimizde dersin ilk yarısında bu fikri ele alacağız.

[transkript sonu]